

Informations - Informationen - Informazioni - Notes

STUDIORUM PROGRESSUS

Eine praktische Transformationsmethode zwischen trichromatischen und Vollfarbkoordinaten

Von R. ROMETSCH und K. MIESCHER¹, Basel

1. Auswahl von Farbkoordinaten

Zur psychophysischen Charakterisierung einer Körperfarbe sind bekanntlich drei Kennzahlen erforderlich, die zweckmässig aus dem Remissionsspektrum zu ermitteln sind. Dabei ergeben sich zwei verschiedene Aufgaben: einerseits sind unter einer ganzen Anzahl möglicher Kennzahlentripel² die für den praktischen Gebrauch geeignetsten auszuwählen, und ihre gegenseitige Transformierbarkeit ist aufzuzeigen, andererseits ist eine empfindungsgemäss richtige Stufung vorzunehmen. Ersteres ist Gegenstand der «Mischmetrik», die auch «Reizmetrik» (LUTHER³) oder «niedere Farbmeterik» (SCHRÖDINGER³) genannt wird und auf dem Prinzip der geraden Mischlinien beruht. Letzteres gehört dagegen zum Gebiet der «Stufenmetrik» oder der «höheren Farbmeterik» im Sinne SCHRÖDINGERS. Hierüber soll in einer folgenden, ausführlicheren Publikation im Zusammenhang mit der Aufstellung eines symmetrischen Urfarbenkreises berichtet werden⁴. Die vorliegende Arbeit ist als Beitrag zur Mischmetrik gedacht.

Das heute gebräuchlichste mischmetrische System, das 1931 von der internationalen Beleuchtungskommission zur Norm bestimmte trichromatische, setzt jede Farbe additiv aus drei festgelegten Grundfarben Rot (X), Grün (Y) und Blau (Z) zusammen, deren Beträge aus dem Remissionsspektrum, der gewünschten Beleuchtungsfunktion und den Normvalenzen der Spektralfarben abgeleitet werden können. Da wir psychologisch sicherlich eine Farbe nicht nach ihrem Rot-, Grün- und Blauwert beurteilen, ergab sich von Anbeginn der Wunsch nach einer anschaulicheren Kennzeichnung. Hiefür schlug HELMHOLTZ Farbton, Sättigung und Helligkeit (oder Leuchtdichte) vor⁵. Eine andere dazu auf den ersten Blick gegensätzliche, sehr interessante Gruppe «psychologischer» Kennzahlen geht auf OSTWALD⁶ zurück, der jede Körperfarbe als additive Mischung von Weiss, Schwarz und Vollfarbe bestimmten Farbtönen darstellt. Beiden Kennzahlgruppen gemeinsam ist – im Gegensatz zum trichromatischen System – der Bezug auf eine einzige Vergleichsfarbe bestimmten Farbtönen, der zum

Beispiel durch die Wellenlänge der betreffenden Spektralfarbe oder die Nummer in einem Farbtonkreis festgelegt wird.

Im Verlauf von Vorarbeiten für die Aufstellung eines neuen Farbsystems hat RICHTER¹ vor einigen Jahren experimentell festzustellen versucht, welche von den beiden «psychologischen» Kennzahlgruppen der durchschnittlichen «natürlichen» Farbbetrachtungsweise besser entspricht. Er liess 40 unvoreingenommene Versuchspersonen 10 beliebig ausgewählte Farben beschreiben und übersetzte dann die Aussagen in die Terminologie der Farbenlehre. Es ergaben sich zwei gleich grosse Gruppen, von denen die eine nach *Helmholtz-Begriffen*, die andere nach *Ostwald-Begriffen* urteilte. Eine Verfeinerung des Versuches, indem nach der Gleichwertigkeit von Farben gleichen Schwarz- und Weissgehalts gefragt wurde, führte ebenfalls nicht zu eindeutigen Ergebnissen.

Tatsächlich wäre es von Vorteil, wenn man die beiden so gegensätzlich erscheinenden Begriffsgruppen nebeneinander benützen und je nach Problemstellung die einen oder anderen Kennzahlen verwenden könnte; denn, wie der Richtersche Versuch zeigt, sind sie im Grunde genommen *gleichwertig*.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Kennzeichnung einer Körperfarbe durch HELMHOLTZ oder OSTWALD besteht darin, dass sie zweierlei Bezugsfarben verwenden. HELMHOLTZ benützt hiezu Spektralfarben, OSTWALD aber die Vollfarben; beide sind durch gewisse Maximalbedingungen ausgezeichnet. Bezieht man dagegen die zwei Koordinatensysteme auf dieselben Reinfarben, so ergeben sich, wie MIESCHER bereits 1925 erkannte², sehr einfache Zusammenhänge. Dabei weisen zur Bezeichnung der Körperfarben gerade die Vollfarben besondere Vorzüge auf.

MIESCHER³ wie auch RICHTER⁴ haben Transformationsformeln für die Umwandlung von trichromatischen in Ostwaldsche Vollfarbmasszahlen mitgeteilt, wobei damals die darin auftretenden trichromatischen Koordinaten der Vollfarben für energiegeliches Spektrum berechnet wurden. Später gaben FOSS, NICKERSON und GRANVILLE⁵ in einer Analyse des Ostwald-Systems die trichromatischen Koordinaten von 29 Paaren komplementärer Vollfarben an, bezogen auf die inzwischen eingeführte Normlichtart C, sowie von 44 Mischungen davon mit Weiss und Schwarz entsprechend den Ostwald-Normen a, c, e, g, i, l, n und p. Die mitgeteilten Tabellen sind vorzüglich geeignet für die Umwandlung von Ostwald- in trichromatische Koordinaten, nicht jedoch für die umgekehrte Transformation, wozu man mit Hilfe von umfangreichen graphischen Darstellungen in drei Dimensionen interpolieren muss. Die heutige apparative Technik stellt aber gerade das umgekehrte Problem; denn mit den modernen selbstregistrierenden Spektralphotometern, zum Beispiel demjenigen nach HARDY⁶, erhält man innert 3 min genaue Remissionskurven, in Kombination mit dem automatischen Integrator von

¹ Wissenschaftliche Laboratorien der CIBA-Aktiengesellschaft, Basel.

² Siehe zum Beispiel R. LUTHER, Z. techn. Phys. 8, 540 (1927).

³ E. SCHRÖDINGER, *Die Gesichtsempfindungen*, in: MÜLLER-POUILLETS, *Lehrbuch der Physik*, 11. Aufl., Bd. 2, Teil 1 (Verlag Vieweg, Braunschweig 1926), S. 456–560. Siehe auch Ann. Physik [4] 63, 397, 489 (1920).

⁴ Über Vorarbeiten siehe K. MIESCHER, Helv. physiol. Acta 6, C 12–13 (1948); Verh. schweiz. naturforsch. Ges. 1949, 125; Chimia 3, 243 (1949).

⁵ H. v. HELMHOLTZ, *Handbuch der Physiologischen Optik*, 2. Bd., 3. Aufl. (Verlag Voss, Hamburg und Leipzig, 1911), S. 109. Schon J. NEWTON ordnete die Farbtöne im Kreise an, in dessen Mittelpunkt er Weiss verlegte. Die Sättigung der Farbe charakterisiert er durch ihren Abstand vom Weisspunkt. [J. NEWTON, *Optik* (1704); *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 96, S. 100.]

⁶ W. OSTWALD, *Die Farbenfibel* (Verlag Unesma, Leipzig 1934) und zahlreiche andere Werke zur Farbenlehre.

¹ M. RICHTER, Z. wiss. Photogr. 45, 139 (1950).

² K. MIESCHER, Z. Sinnesphysiol. 57, 46 (1925).

³ K. MIESCHER, Z. techn. Physik 11, 233 (1930).

⁴ M. RICHTER, Z. techn. Physik 12, 582 (1931); siehe auch M. RICHTER, *Grundriss der Farbenlehre* (Verlag Theodor Steinkopf, Dresden und Leipzig 1940), S. 108, 212.

⁵ C. F. FOSS, D. NICKERSON und W. C. GRANVILLE, J. Opt. Soc. Amer. 34, 361 (1944).

⁶ A. C. HARDY, J. Opt. Soc. Amer. 18, 96 (1929); vgl. auch J. L. MICHAELSON, J. Opt. Soc. Amer. 28, 365 (1938).

DAVIDSON und IMM¹ gleichzeitig auch die trichromatischen Koordinaten.

Entsprechende Apparaturen zur direkten Bestimmung der Ostwald-Kennzahlen mit gleicher Genauigkeit sind unseres Wissens nicht erhältlich. Wir haben deshalb ein praktisches Transformationsschema entwickelt, das gestattet, mit einer einzigen graphischen oder rechnerischen Interpolation aus den trichromatischen Masszahlen Vollfarbkoordinaten in Ostwaldscher oder Helmholtz-scher Ausdrucksweise zu berechnen.

2. Definition der Vollfarben und der davon abgeleiteten Koordinaten

Stellen Spektralfarben Farben physikalisch grösstmöglicher Sättigung dar, so kommt den Vollfarben nach MIESCHER das grösste «Reinfarbgewicht» zu². Sie weisen bei gegebener Beleuchtung eine maximale Quantität des betreffenden Farbtönen auf und erfordern von allen theoretisch möglichen farbtongleichen Körperfarben ein Maximum an Gegenfarbe zu ihrer Neutralisierung. Es sind «maximale» Optimalfarben im Sinne von SCHRÖDINGER³, LUTHER⁴ und RÖSCH⁵ mit höchstens zwei Sprungstellen im Spektrum.

Wie schon OSTWALD darauf hingewiesen hat, stehen die Vollfarben mit ihren breiten Spektren den üblichen Körperfarben näher als die Spektralfarben; ausserdem vermögen sie die «Purpurlücke» des Spektrums (nahezu ein Viertel des Farbkreises) mühelos zu überbrücken. Daher rührt auch ihre besondere Eignung als einheit-

¹ H. R. DAVIDSON und L. W. IMM, J. Opt. Soc. Amer. 39, 942 (1949).

² K. MIESCHER, Z. Sinnesphysiol. 57, 78 (1925).

³ E. SCHRÖDINGER, Ann. Phys. [4] 62, 603 (1920).

⁴ R. LUTHER, Z. techn. Physik 3, 540 (1927).

⁵ S. RÖSCH, Physik. Z. 29, 83 (1928).

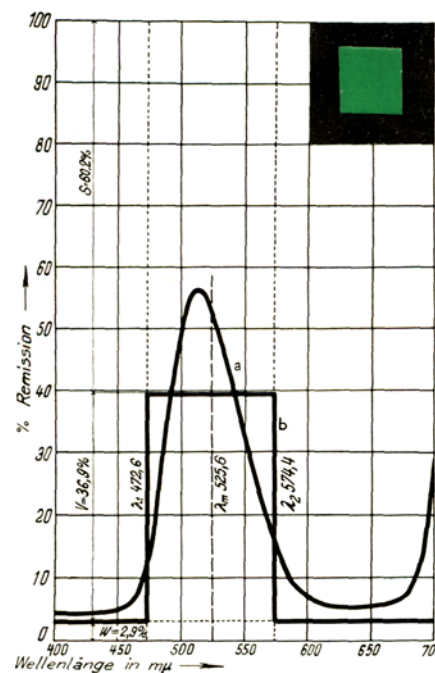


Abb. 1. a Remissionskurve der grünen Färbung höchstmöglicher Sättigung. – b Remissionskurve einer dazu metameren Farbe, dargestellt als Mischung von farbtongleicher Vollfarbe (36,9%), Weiss (2,9%) und Schwarz (60,2%). λ_1 und λ_2 Grenzwellenlängen der farbtongleichen Vollfarbe. λ_m Wellenlänge der farbtongleichen Spektralfarbe.

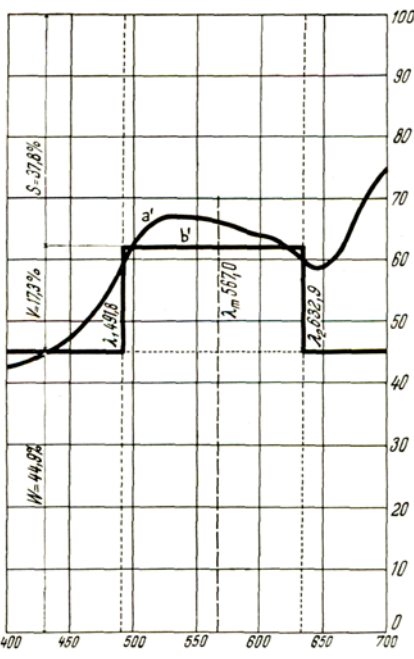


Abb. 2. a' Remissionskurve der hellgelbgrünen Farbe der Umschlagsseite dieser Zeitschrift. – b' Remissionskurve einer dazu metameren Farbe, dargestellt als Mischung von farbtongleicher Vollfarbe (17,3%), Weiss (44,9%) und Schwarz (37,8%). λ_1 und λ_2 Grenzwellenlängen der farbtongleichen Vollfarbe. λ_m Wellenlänge der farbtongleichen Spektralfarbe.

liche Bezugsgrössen der Koordinatensysteme nach OSTWALD oder HELMHOLTZ.

Die Definition der Vollfarbkoordinaten, die auch den Darlegungen von FOSS, NICKERSON und GRANVILLE¹ zugrunde liegt, beruht auf den Grassmannschen Gesetzen und lautet: Für beliebige Farben, deren Remissionskurven (a und a') gemäss den beiden Beispielen der Abbildungen 1 und 2 gegeben seien, können wir immer eindeutig zugeordnete «metamere» oder «bedingt-gleiche» Farben finden, deren Remissionskurven (b und b') durch nur zwei konstante Werte und höchstens zwei Sprungstellen gekennzeichnet sind, wobei die zwei Sprungstellen entweder bei (für die gegebene Beleuchtungsart) komplementären Wellenlängen liegen oder, wo dies nicht möglich ist, die eine Sprungstelle im langwelligen bzw. kurzwelligen Spektrumsende verschwindet. Der kleinere der beiden konstanten Remissionswerte ist dann gleich dem Weissanteil w der vorgegebenen Farbe, die Differenz zwischen dem kleineren und dem grösseren gleich dem Vollfarbanteil v und die Differenz zwischen dem grösseren und hundert gleich dem Schwarzanteil s .

Sind die beiden konstanten Remissionswerte im idealen Grenzfall Null und Hundert, Weiss- und Schwarzanteil also gleich Null, dann liegen Vollfarben vor. Dabei lassen sich nach SCHRÖDINGER² vier verschiedene Typen idealisierter Körperfarben mit Vollfarbcharakter unterscheiden, je nach der Lage der Grenzwellenlängen im Spektrum (vgl. dazu Abb. 5 und 6).

1. Farben, die zwischen zwei, bei gegebener Beleuchtung komplementären Wellenlängen alles Licht reflektieren, den Rest des Spektrums jedoch vollständig absorbieren (Mittelpigmente).

1C. Farben, die zwischen zwei, bei gegebener Beleuchtung komplementären Wellenlängen alles Licht absorbieren, den Rest des Spektrums jedoch vollständig reflektieren (Mittelfehl-pigmente). Diese Vollfarben sind komplementär zu den unter 1. genannten.

2. Farben, die vom langwelligen Spektrumsende bis zu Wellenlängen im mittleren Teil des Spektrums, für die es bei gegebener Beleuchtungsart keine Komplementärwellenlängen gibt, alles Licht reflektieren und den Rest des Spektrums vollständig absorbieren (Langendpigmente).

2C. Farben, die vom kurzwelligen Spektrumsende ebenfalls bis zu Wellenlängen, für die es bei gegebener Beleuchtungsart keine Komplementärwellenlängen gibt, alles Licht reflektieren und den Rest des Spektrums vollständig absorbieren (Kurzendpigmente). Diese Vollfarben sind komplementär zu den unter 2. genannten.

3. Zentrierte Normfarbwerte der Vollfarben

Zur Ermittlung der trichromatischen Normfarbwerte³ X_v , Y_v

¹ C. F. FOSS, D. NICKERSON und W. C. GRANVILLE, J. Opt. Soc. Amer. 34, 361 (1944).

² E. SCHRÖDINGER, Ann. Phys. [4] 62, 603 (1920).

³ Es sind hier die im Entwurf zum neuen Deutschen Normblatt für Farbmessung, DIN 5033, Blatt 2, vorgeschlagenen Ausdrücke verwendet.

und Z_v der Vollfarben sind jeweils die Normspektralwerte \bar{x} , \bar{y} und \bar{z} , multipliziert mit den zugehörigen Werten der gewählten Beleuchtungsfunktion E_λ , das heisst die Normfarbwerte der Spektralfarben, über die Gebiete mit der Remission = 1 zu integrieren.

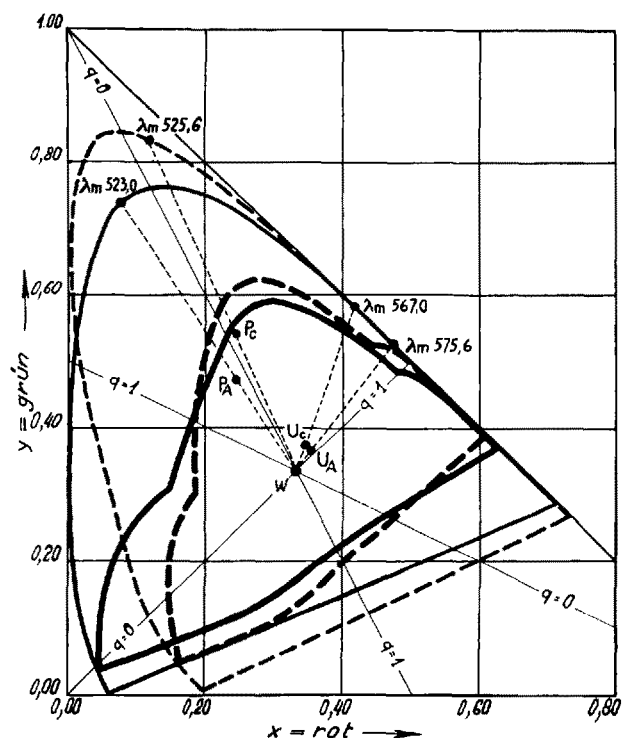


Abb. 3. Spektralfarbenzüge und Vollfarbenzüge im auf die Normlichtarten A (ausgezogen) bzw. C (gestrichelt) zentrierten IBK-Dreieck. W = Mittelpunkt = Beleuchtungspunkt. PA und PC Farbpunkte der tiefgrünen Färbung, UA und UC Farbpunkte des hellgelbgrünen Umschlags dieser Zeitschrift bei den Normlichtarten A und C.

Da die additive Mischung gleicher Anteile zweier Gegenvollfarben, unabhängig von ihrer Lage, das ganze Spektrum umfasst, ergänzen sich ihre Normfarbwerte zu denjenigen einer ideal weissen Fläche, die mit den Normfarbwerten der angewandten Lichtart identisch sind. Sie fallen nur für die von der «Deutschen Lichttechnischen Gesellschaft» früher vorgeschlagene, aber international nicht anerkannte Normlichtart E mit den Koordinaten von trichromatisch definiertem Weiss, $X_W = Y_W = Z_W = 1$ (Mittelpunkt der Farbtabelle), zusammen. Für Normlichtart A (Glühlampenlicht) gilt¹ $X_W = 1,1852$, $Y_W = 1,0790$, $Z_W = 0,3838$ und für Normlichtart C (Tageslichtersatz) $X_W = 1,0439$, $Y_W = 1,0647$, $Z_W = 1,2579$.

Um nun die Umrechnungsformeln für Vollfarbkoordinaten nicht mit den für jede Lichtart verschiedenen Koordinaten von Weiss zu belasten, transformieren wir sämtliche Normfarbwerte von vornherein so, dass der Farbort der Lichtart in den Koordinatenmittelpunkt der trichromatischen Farbtabelle (Abb. 3) verschoben wird und den Koordinaten der ideal weissen Fläche unabhängig von der Lichtart der Wert 1 zukommt. Man erhält damit neue, «zentrierte» Koordinaten X^* , Y^* und Z^* , die sich aus den nach üblichen Methoden ermittelten Normfarbwerten X , Y und Z ergeben, indem man durch

die Normfarbwerte der Lichtart dividiert¹; es wird somit für

Normlichtart A	Normlichtart C	
$X^* = 0,8437 X$	$X^* = 0,9579 X$	
$Y^* = 0,9269 Y$	$Y^* = 0,9392 Y$	(1)
$Z^* = 2,6055 Z$	$Z^* = 0,7950 Z$	

Y^* stellt unmittelbar die Helligkeit (Leuchtdichte) der trichromatischen Farbe bei der betreffenden Beleuchtung in Anteilen von 1 dar.

Angewandt auf die im *Handbook of Colorimetry* von HARDY tabellierten Normfarbwerte der Spektralfarben ergeben sich mit diesen Transformationen die auf Normlichtart A bzw. C zentrierten, nun je nach Lichtart verschiedenen Spektralfarbenzüge der Abbildung 3.

Zur Gewinnung der eingangs dieses Abschnitts erwähnten Integrale summieren wir die auf Normlichtart A zentrierten Normfarbwerte der Spektralfarben für jedes $m\mu$ auf, wonach sich die zentrierten Normfarbwerte der Vollfarben ohne weiteres als Differenzen zwischen den Summenwerten für die Grenzwellenlängen ablesen liessen. Das Ergebnis für einen geschlossenen Farbtonkreis ist in Tabelle 1 zusammengefasst. Die Vollfarben der ersten Hälfte des Kreises sind darin, beginnend mit Gelb über Orange, Rot, Violett nach Blau, willkürlich von 1 bis 47 numeriert, die dazu komplementären Vollfarben von Blau über Grün zurück nach Gelb mit 1' bis 47'. Ausser den zentrierten Normfarbwerten sind die zentrierten Normfarbanteile (Farbtabelle-Koordinaten), die durch die Definition der Vollfarben bedingte Typenbezeichnung, die Grenz- und die charakteristischen Wellenlängen angegeben, sowie später zu erörternde, für die Transformation auf Vollfarbkoordinaten wichtige Grössen.

Die entsprechenden Zahlenwerte für Vollfarben unter Normlichtart C der Tabelle 2 sind zum grösseren Teil der Arbeit von FOSS, NICKERSON und GRANVILLE² entnommen und nachträglich zentriert worden. Nur einige Zwischenwerte, die zur Verbesserung der Interpolationsgenauigkeit eingefügt werden mussten, sind nach der oben angegebenen Methode berechnet.

In der Farbtabelle, Abbildung 3, sind die beiden Vollfarbenzüge gemäss den Normlichtarten A und C wiedergegeben.

4. Transformation trichromatischer Normfarbwerte in Vollfarbkoordinaten

Wie aus den Abbildungen 1 und 2 ohne weiteres ersichtlich ist, können die idealisierten Farben b bzw. b' als Summe des Anteils w von Weiss und des Anteils v der Vollfarbe gleichen Farbtons angesehen werden. Unter Berücksichtigung, dass für Idealweiss $X_W^* = Y_W^* = Z_W^* = 1$ gilt, lassen sich demnach die zentrierten trichromatischen Normfarbwerte dieser Farben sehr einfach durch die Gleichungen (2) darstellen³,

¹ Die mit dem automatischen Integrator des Hardy-Spektrophotometers auf Normlichtart C bezogenen Koordinaten X' , Y' und Z' entsprechen den Quotienten:

$$X' = \frac{X}{1,0647}, \quad Y' = \frac{Y}{1,0647} \quad \text{und} \quad Z' = \frac{Z}{1,0647}.$$

Hieraus sowie aus (1) folgt

$$X^* = 1,0199 X', \quad Y^* = Y' \quad \text{und} \quad Z^* = 0,8464$$

(für Normlichtart C). – Diese «Zentrierungs»-Transformation wird auch im DIN-Normblatt 5033, Abschnitt 7.6, empfohlen.

² C. F. FOSS, D. NICKERSON und W. C. GRANVILLE, J. Opt. Soc. Amer. **34**, 361 (1944).

³ Im folgenden werden zur Erleichterung des Überblicks sämtliche Vollfarbkoordinaten in Prozent ausgedrückt, alle übrigen Koordinaten als Anteile von 1.

¹ A. C. HARDY, *Handbook of Colorimetry* (The Technology Press, Cambridge, Mass., USA. 1936–1948), S. 49.

Tabelle I.-Zentrierte trichromatische Koordinaten der Vollfarben bei Normlichtart A.

Typ	Nr.	S	q	λ_m	λ_1	λ_2	X*	Y*	Z*	A_v-C_v	x*	y*
2	1	I	1,0000	581,6	507,4	740,0	0,9510	0,9510	0,0531	0,8979	0,4864	0,4864
	2		0,9917	582,0	510,0		0,9509	0,9434	0,0456	0,9053	0,4902	0,4863
	3		0,9516	583,4	520,0		0,9490	0,9043	0,0251	0,9239	0,5052	0,4814
	4		0,9267	584,5	525,0		0,9464	0,8784	0,0186	0,9278	0,5134	0,4765
	5		0,9052	585,4	529,0		0,9429	0,8549	0,0145	0,9284	0,5203	0,4717
	6		0,8705	587,0	535,0		0,9352	0,8154	0,0099	0,9253	0,5312	0,4632
	7		0,8398	588,5	540,0		0,9260	0,7788	0,0072	0,9188	0,5409	0,4549
	8		0,7753	591,8	550,0		0,8988	0,6977	0,0040	0,8948	0,5616	0,4359
	9		0,7092	595,7	560,0		0,8570	0,6085	0,0025	0,8545	0,5838	0,4145
	10		0,6765	598,1	565,0		0,8296	0,5619	0,0021	0,8275	0,5953	0,4032
	11		0,6446	600,4	570,0		0,7976	0,5147	0,0017	0,7959	0,6070	0,3917
	12		0,5905	605,6	579,00	380,0	0,7276	0,4302	0,0013	0,7263	0,6277	0,3712
1c	13	I	0,5731	607,2	579,05	420,0	0,7290	0,4298	0,0281	0,7009	0,6142	0,3621
	14		0,5567	609,4	579,08	425,0	0,7303	0,4296	0,0520	0,6783	0,6026	0,3545
	15		0,5283	613,0	579,12	430,0	0,7325	0,4293	0,0897	0,6428	0,5853	0,3430
	16		0,4851	620,5	579,18	435,0	0,7353	0,4289	0,1402	0,5951	0,5637	0,3288
	17		0,4231	644,0	579,26	440,0	0,7386	0,4284	0,2009	0,5377	0,5400	0,3132
	18		0,3741	- 504,2	579,32	443,0	0,7406	0,4281	0,2413	0,4993	0,5252	0,3036
	19		0,3352	- 504,8	579,36	445,0	0,7421	0,4279	0,2695	0,4726	0,5155	0,2973
	20		0,2646	- 505,8	579,44	448,0	0,7442	0,4274	0,3134	0,4308	0,5011	0,2878
	21		0,2078	- 506,5	579,50	450,0	0,7455	0,4271	0,3436	0,4019	0,4917	0,2817
	22		0,1016	- 507,8	579,59	453,0	0,7475	0,4266	0,3903	0,3572	0,4778	0,2727
	23		0,0591	- 508,2	579,63	454,0	0,7481	0,4264	0,4062	0,3419	0,4733	0,2698
	24		0,0119	- 508,7	579,67	455,0	0,7487	0,4262	0,4223	0,3264	0,4688	0,2668
	25	II	0,0000	- 508,8	579,68	455,235	0,7489	0,4261	0,4261	0,3228	0,4677	0,2661
	26		0,2417	- 511,3	579,90	460,0	0,7514	0,4250	0,5039	0,3264	0,4472	0,2529
	27		0,5594	- 515,9	580,30	466,4	0,7536	0,4229	0,6079	0,3307	0,4223	0,2370
	28		0,7438	- 519,8	580,70	470,4	0,7530	0,4205	0,6678	0,3325	0,4090	0,2284
	29	III	0,9418	- 526,1	581,40	475,1	0,7496	0,4161	0,7302	0,3335	0,3954	0,2195
	30		1,0000	- 528,3	581,68	476,56	0,7478	0,4142	0,7478	0,3336	0,3916	0,2169
	31		0,9297	- 531,2	582,15	478,50	0,7444	0,4110	0,7696	0,3586	0,3867	0,2135
	32		0,8866	- 533,3	582,5	479,90	0,7417	0,4087	0,7843	0,3756	0,3834	0,2112
	33		0,8405	- 535,6	583,0	481,55	0,7376	0,4052	0,8007	0,3955	0,3795	0,2085
	34		0,8051	- 537,7	583,5	482,95	0,7334	0,4016	0,8137	0,4121	0,3764	0,2061
	35		0,7563	- 540,6	584,4	485,05	0,7253	0,3951	0,8317	0,4366	0,3715	0,2024
	36		0,7155	- 543,7	585,4	486,95	0,7160	0,3878	0,8465	0,4587	0,3671	0,1988
	37		0,6177	- 550,0	589,0	491,65	0,6804	0,3610	0,8781	0,5171	0,3545	0,1881
	38		0,5432	- 555,0	593,0	494,82	0,6379	0,3311	0,8959	0,5648	0,3421	0,1775
	39		0,4543	- 560,3	599,0	497,78	0,5705	0,2876	0,9103	0,6227	0,3226	0,1626
	40		0,4279	- 561,9	601,0	498,49	0,5475	0,2737	0,9136	0,6399	0,3156	0,1578
	41		0,3211	- 567,7	610,0	500,73	0,4426	0,2154	0,9230	0,7076	0,2799	0,1362
	42		0,2234	- 572,2	620,0	502,03	0,3322	0,1608	0,9281	0,7673	0,2338	0,1132
	43		0,1486	- 575,6	630,0	502,74	0,2391	0,1184	0,9308	0,8124	0,1856	0,0919
	44		0,0951	- 577,8	640,0	503,18	0,1685	0,0882	0,9325	0,8443	0,1417	0,0742
	45		0,0593	442,0	650,0	503,44	0,1192	0,0679	0,9335	0,8656	0,1064	0,0606
	46		0,0370	465,0	660,0	503,58	0,0879	0,0554	0,9340	0,8786	0,0816	0,0514
2c	47		0,0100	474,0	740,0	503,75	0,0491	0,0402	0,9346	0,8944	0,0480	0,0393

$$X^* = \frac{v}{100} \cdot X_v^* + \frac{w}{100},$$
$$Y^* = \frac{v}{100} \cdot Y_v^* + \frac{w}{100},$$
$$Z^* = \frac{v}{100} \cdot Z_v^* + \frac{w}{100},$$

(2)

worin X_v^* , Y_v^* und Z_v^* die zentrierten trichromatischen Normfarbwerte der Vollfarben bedeuten und aus den Tabellen 1 bzw. 2 zu entnehmen sind.

Die Normfarbwerte der idealisierten Farben b und b' sind nun andererseits identisch mit denjenigen der realen Farben a bzw. a' , entsprechend der Grassmannschen Forderung, wonach metameren oder bedingt-gleichen Farben, das heisst Farben gleichen Aussehens, aber verschiedenen Remissionsverlaufs, unter gleicher Beleuchtung dieselben trichromatischen Normfarbwerte zukommen. Der gesuchte Zusammenhang zwischen den Ostwaldschen Vollfarbkoordinaten w und v und den durch

Integration der Produkte aus Remissionswert, Normspektラルwert und Beleuchtungsfunktion über das ganze Remissionsspektrum ermittelten Normfarbwerte ist somit durch die Gleichungen (2) gegeben.

Zur Auflösung des Gleichungssystems (2) nach v und w ist es von Vorteil, immer diejenigen zwei Gleichungen auszuwählen, die die grösste und kleinste der trichromatischen Koordinaten betreffen, da dadurch die höchste Genauigkeit erzielt und der Unbestimmtheit am Schnittpunkt der Summenkurven von $E \bar{x}$ und $E \bar{y}$ automatisch ausgewichen wird. Wir ersetzen deshalb X^* , Y^* und Z^* durch A , B und C sowie die Vollfarbkoordinaten X_v^* , Y_v^* und Z_v^* durch A_v , B_v und C_v , mit der Bedingung, dass A bzw. A_v immer der grösste und C bzw. C_v immer der kleinste der zentrierten Normfarbwerte sein soll¹. Es wird dann allgemein:

¹ Diese Beziehung soll nur für zentrierte Normfarbwerte gelten, womit wir auch auf die Zentrierungsindizes * verzichten können.

Tabelle I.-Zentrierte trichromatische Koordinaten der Vollfarben bei Normlichtart A

Typ	Nr.	S	q	λ_m	λ_1	λ_2	X^*	Y^*	Z^*	$A_v - C_v$	x^*	y^*
2c	1'	IV	0,0000	476,0	380,0	507,4	0,0490	0,0490	0,9469	0,8979	0,0469	0,0469
	2'		0,0083	477,7		510,0	0,0491	0,0566	0,9544	0,9053	0,0463	0,0534
	3'		0,0484	482,9		520,0	0,0510	0,0957	0,9749	0,9239	0,0455	0,0853
	4'		0,0733	485,3		525,0	0,0536	0,1216	0,9814	0,9278	0,0463	0,1051
	5'		0,0948	487,1		529,0	0,0571	0,1451	0,9855	0,9284	0,0481	0,1222
	6'		0,1295	489,3		535,0	0,0648	0,1846	0,9901	0,9253	0,0523	0,1489
	7'		0,1602	491,1		540,0	0,0740	0,2212	0,9928	0,9188	0,0575	0,1717
	8'		0,2247	494,0		550,0	0,1012	0,3023	0,9960	0,8948	0,0723	0,2160
	9'		0,2908	496,4		560,0	0,1430	0,3915	0,9975	0,8545	0,0933	0,2555
	10'		0,3255	497,4		565,0	0,1704	0,4381	0,9979	0,8275	0,1061	0,2727
	11'		0,3554	498,3		570,0	0,2024	0,4853	0,9983	0,7959	0,1200	0,2878
	12'		0,4095	499,8		579,00	0,2724	0,5698	0,9987	0,7263	0,1480	0,3095
	13'		0,4269	500,2	420,0	579,05	0,2710	0,5702	0,9719	0,7009	0,1495	0,3145
	14'		0,4433	500,6	425,0	579,08	0,2697	0,5704	0,9480	0,6783	0,1508	0,3190
	15'		0,4717	501,2	430,0	579,12	0,2675	0,5707	0,9103	0,6428	0,1530	0,3264
	16'		0,5149	502,1	435,0	579,18	0,2647	0,5711	0,8598	0,5951	0,1561	0,3368
	17'		0,5769	503,3	440,0	579,26	0,2614	0,5716	0,7991	0,5377	0,1602	0,3502
	18'		0,6259	504,2	443,0	579,32	0,2594	0,5719	0,7587	0,4993	0,1631	0,3597
	19'		0,6648	504,8	445,0	579,36	0,2579	0,5721	0,7305	0,4726	0,1653	0,3666
	20'		0,7354	505,8	448,0	579,44	0,2558	0,5726	0,6866	0,4308	0,1688	0,3780
	21'		0,7922	506,5	450,0	579,50	0,2545	0,5729	0,6564	0,4019	0,1715	0,3861
	22'		0,8984	507,8	453,0	579,59	0,2525	0,5734	0,6097	0,3572	0,1759	0,3994
	23'		0,9409	508,2	454,0	579,63	0,2519	0,5736	0,5938	0,3419	0,1775	0,4041
	24'		0,9881	508,7	455,0	579,67	0,2513	0,5738	0,5777	0,3264	0,1791	0,4090
1	25'	V	1,0000	508,8	455,235	579,68	0,2511	0,5739	0,5739	0,3228	0,1795	0,4103
	26'		0,7583	511,3	460,0	579,9	0,2486	0,5750	0,4961	0,3264	0,1884	0,4357
	27'		0,4406	515,9	466,4	580,3	0,2464	0,5771	0,3921	0,3307	0,2027	0,4747
	28'		0,2562	519,8	470,4	580,7	0,2470	0,5795	0,3322	0,3325	0,2132	0,5001
	29'		0,0582	526,1	475,0	581,4	0,2504	0,5839	0,2698	0,3335	0,2268	0,5288
	30'	VI	0,0000	528,3	476,56	581,68	0,2522	0,5858	0,2522	0,3336	0,2313	0,5373
	31'		0,0703	531,2	478,5	582,15	0,2556	0,5890	0,2304	0,3586	0,2378	0,5479
	32'		0,1134	533,3	479,9	582,5	0,2583	0,5913	0,2157	0,3756	0,2425	0,5551
	33'		0,1595	535,6	481,55	583,0	0,2624	0,5948	0,1993	0,3955	0,2484	0,5630
	34'		0,1949	537,7	482,95	583,5	0,2666	0,5984	0,1863	0,4121	0,2536	0,5692
	35'		0,2437	540,6	485,05	584,4	0,2747	0,6049	0,1683	0,4366	0,2621	0,5772
	36'		0,2845	543,7	486,95	585,4	0,2840	0,6122	0,1535	0,4587	0,2706	0,5832
	37'		0,3823	550,0	491,65	589,0	0,3196	0,6390	0,1219	0,5171	0,2958	0,5914
	38'		0,4568	555,0	494,82	593,0	0,3621	0,6689	0,1041	0,5648	0,3190	0,5893
	39'		0,5457	560,3	497,78	599,0	0,4295	0,7124	0,0897	0,6227	0,3487	0,5784
	40'		0,5721	561,9	498,49	601,0	0,4525	0,7263	0,0864	0,6399	0,3577	0,5741
	41'		0,6789	567,7	500,73	610,0	0,5574	0,7846	0,0770	0,7076	0,3928	0,5529
	42'		0,7766	572,2	502,03	620,0	0,6678	0,8392	0,0719	0,7673	0,4230	0,5315
	43'		0,8514	575,6	502,74	630,0	0,7609	0,8816	0,0692	0,8124	0,4445	0,5150
	44'		0,9049	577,8	503,18	640,0	0,8315	0,9118	0,0675	0,8443	0,4592	0,5035
	45'		0,9407	579,3	503,44	650,0	0,8808	0,9321	0,0665	0,8656	0,4687	0,4960
	46'		0,9630	580,2	503,58	660,0	0,9121	0,9446	0,0660	0,8786	0,4744	0,4913
2	47'		0,9900	581,1	503,75	740,0	0,9509	0,9598	0,0654	0,8944	0,4812	0,4857

$$A = \frac{v}{100} \cdot A_v + \frac{w}{100}, \quad (3)$$

$$C = \frac{v}{100} \cdot C_v + \frac{w}{100}.$$

und nach v und w aufgelöst

$$v = 100 \frac{A - C}{A_v - C_v}, \quad (4)$$

$$w = 100 N - v \cdot N_v = 100 \frac{A_v C - C_v A}{A_v - C_v},$$

¹ Nach M. RICHTER (*Grundriss der Farbenlehre* [Verlag Theodor Steinkopf, Dresden und Leipzig 1940], S. 110) gilt auch

$$v = \frac{M}{M_v} \cdot 100,$$

wobei M und M_v die Lutherschen Farbmomente $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$ bedeuten. Letztere sind aber umständlicher zu berechnen als die unserer Bestimmung zugrunde liegenden Differenzwerte der Koordinaten. Diese stellen übrigens die trichromatischen «Reinheiten» der Farb-

wobei N bzw. N_v für irgendeinen der drei zentrierten Normfarbwerte A , B oder C bzw. A_v , B_v oder C_v steht. Den Schwarzanteil erhält man nach

$$s = 100 - (w + v) = 100 - \frac{A(1 - C_v) - C(1 - A_v)}{A_v - C_v} 100. \quad (5)$$

Aus den Ostwald-Koordinaten Weiss, Schwarz und Vollfarbe ergeben sich in einfachster Weise die von MIESCHER abgeleiteten modifizierten «Helmholtz-Koordinaten» Sättigung t , Weisslichkeit h und Vollfarb- bezug (Bezugshelligkeit) f , ausgedrückt in Prozenten, gemäss den Gleichungen:

$$t = 100 \frac{v}{w + v}, \quad h = 100 \frac{w}{w + v}, \quad (6)$$

$$f = w + v = 100 - s = 100 N - v(1 - N_v),$$

wobei für alle Vollfarben $t = f = 100$ und $h = 0$ gilt.

probe und der entsprechenden Vollfarbe dar, siehe K. MIESCHER, Z. techn. Physik 11, 66 (1930).

Tabelle II.—Zentrierte trichromatische Koordinaten der Vollfarben bei Normlichtart C

Typ	Nr.	S	q	λ_m	λ_1	λ_2	X*	Y*	Z*	A_v-C_v	x*	y*
2	1		1,0000	577,3	524,15	740,0	0,7924	0,7924	0,0070	0,7854	0,4978	0,4978
	2		0,9530	579,1	530,0		0,7852	0,7485	0,0047	0,7805	0,5104	0,4865
	3		0,8676	582,7	540,0		0,7635	0,6627	0,0023	0,7612	0,5345	0,4639
	4		0,8192	584,9	545,5		0,7456	0,6111	0,0015	0,7441	0,5490	0,4499
	5		0,7794	586,9	550,0	380,0	0,7276	0,5673	0,0011	0,7265	0,5614	0,4377
	6		0,7313	589,5	555,5		0,7011	0,5129	0,0008	0,7003	0,5771	0,4222
	7		0,6929	591,8	560,0		0,6757	0,4684	0,0006	0,6751	0,5903	0,4092
	8		0,6359	595,7	567,0		0,6300	0,4008	0,0005	0,6295	0,6109	0,3886
1c	9	I	0,6012	598,3	567,3	420,0	0,6372	0,3982	0,0379	0,5993	0,5937	0,3710
	10		0,5680	601,3	567,4	425,0	0,6451	0,3975	0,0719	0,5732	0,5788	0,3567
	11		0,5112	607,4	567,5	430,0	0,6575	0,3971	0,1248	0,5327	0,5575	0,3367
	12		0,4607	615,0	567,7	433,0	0,6659	0,3956	0,1647	0,5012	0,5431	0,3226
	13		0,3982	632,5	567,8	436,0	0,6761	0,3952	0,2093	0,4668	0,5280	0,3086
	14		0,2883	–493,3	568,0	440,0	0,6904	0,3942	0,2742	0,4162	0,5081	0,2901
	15		0,2546	–493,7	568,1	441,0	0,6937	0,3936	0,2911	0,4026	0,5033	0,2855
	16		0,1585	–494,8	568,3	443,5	0,7025	0,3925	0,3341	0,3684	0,4916	0,2746
	17		0,0653	–495,8	568,5	445,5	0,7093	0,3913	0,3691	0,3402	0,4826	0,2662
	18	II	0,0000	–496,5	568,61	446,74	0,7136	0,3908	0,3908	0,3228	0,4773	0,2614
	19		0,1745	–498,4	568,9	450,0	0,7247	0,3894	0,4479	0,3353	0,4640	0,2493
	20		0,4219	–502,2	569,6	455,0	0,7391	0,3855	0,5347	0,3536	0,4454	0,2323
	21		0,6422	–507,0	570,4	460,0	0,7510	0,3812	0,6187	0,3698	0,4289	0,2177
	22		0,9018	–515,5	572,0	466,8	0,7601	0,3722	0,7220	0,3879	0,4099	0,2007
	23	III	1,0000	–520,2	572,9	469,48	0,7600	0,3669	0,7600	0,3931	0,4028	0,1944
	24		0,9825	–521,0	573,1	470,0	0,7596	0,3657	0,7666	0,4009	0,4015	0,1933
	25		0,9228	–524,4	574,0	471,9	0,7566	0,3599	0,7898	0,4299	0,3969	0,1888
	26		0,8417	–529,8	575,7	475,0	0,7488	0,3490	0,8240	0,4750	0,3896	0,1816
	27		0,7937	–533,3	577,2	477,0	0,7395	0,3391	0,8436	0,5045	0,3847	0,1764
	28		0,7272	–538,2	580,0	480,0	0,7198	0,3207	0,8695	0,5488	0,3769	0,1679
	29		0,6571	–543,3	584,1	483,0	0,6868	0,2944	0,8916	0,5972	0,3667	0,1572
	30		0,6061	–546,9	587,8	485,0	0,6551	0,2715	0,9044	0,6329	0,3578	0,1483
	31		0,5447	–551,0	593,0	487,0	0,6087	0,2414	0,9157	0,6743	0,3447	0,1367
	32		0,4639	–556,0	600,9	489,0	0,5370	0,2006	0,9257	0,7251	0,3229	0,1206
	33		0,3836	–560,4	610,0	490,4	0,4570	0,1613	0,9322	0,7709	0,2947	0,1040
	34		0,3111	–564,2	620,0	491,2	0,3783	0,1267	0,9354	0,8087	0,2626	0,0880
	35		0,2559	–566,8	630,0	491,7	0,3152	0,1012	0,9375	0,8363	0,2328	0,0747
	36		0,2169	446,0	640,0	492,0	0,2695	0,0842	0,9387	0,8545	0,2085	0,0652
	37		0,1915	455,7	650,0	492,2	0,2390	0,0731	0,9395	0,8664	0,1910	0,0584
	38		0,1761	459,8	660,0	492,3	0,2204	0,0666	0,9399	0,8733	0,1796	0,0543
2c	39		0,1595	463,3	740,0	492,4	0,2000	0,0595	0,9403	0,8808	0,1667	0,0496
	40		0,1472	465,4	380,0	496,5	0,2008	0,0708	0,9542	0,8834	0,1638	0,0578
	41		0,1351	467,0	380,0	500,0	0,2011	0,0820	0,9636	0,8816	0,1613	0,0658
	42		0,0915	471,6	380,0	510,0	0,2015	0,1229	0,9818	0,8589	0,1543	0,0941
	43		0,0307	475,8	380,0	520,0	0,2044	0,1795	0,9909	0,8114	0,1487	0,1306

Der Vollfarb­be­zug er­mög­licht erst eine sys­te­ma­ti­sche Zu­ord­nung aller Kör­per­far­ben im Rah­men des Voll­farb­sys­tems, im Ge­gen­satz zu der von HELMHOLTZ em­pfo­hlenen Hel­lig­keit (oder Leuchtdichte), die bei Voll­far­ben ge­mäss ih­rem Farb­ton in cha­rak­te­ris­ti­scher Wei­se zwi­schen 5% (Blau) und 95% (Gelb) schwänkt. Übrigens er­gibt sich nach OSTWALD die Hel­lig­keit h einer Kör­per­far­be nach der Gleichung

$$h = \frac{h_0 \cdot V + w}{100}, \tag{7}$$

wobei h_0 die spe­zi­fi­sche Hel­lig­keit ($= Y_v$) der be­tre­fenden Voll­far­be be­deutet.

Wenn im Voll­farb­sys­tem eine Kör­per­far­be ab­ge­sehen vom Farb­ton durch Weiss-, Schwarz- und Voll­farb­an­teil nach OSTWALD oder Sät­ti­gung, Weiss­lich­keit und Voll­farb­be­zug nach HELMHOLTZ-MIESCHER ge­kenn­zeich­net wird, so be­deutet dies wegen der Be­zie­hun­gen

$$\begin{aligned} w + s + v &= 100, \\ t + k &= 100 \end{aligned} \tag{8}$$

keine Überbestimmung. Meist be­sch­ränkt man sich auch auf die An­gabe von Weiss- und Schwarz­an­teil nach der

einen oder Sät­ti­gung und Voll­farb­be­zug nach der an­deren Be­zeich­nungs­wei­se.

5. Der Farbtonquotient und die praktische Ermittlung farbtongleicher Vollfarben

Die Berechnung der Voll­farb­koor­di­na­ten¹ nach den For­meln (4) bis (8) setzt die Mög­lich­keit vor­aus, die­jenige Voll­far­be rasch und sicher auf­zu­fin­den, die mit der vor­ge­ge­be­nen und durch ihre tri­chro­ma­ti­schen Norm­farb­werte cha­rak­te­ris­tierten Far­be *farbtongleich* ist. Mit Hilfe der Ta­bel­len von FOSS, NICKERSON und GRANVILLE² ist dies nur schät­zungs­wei­se mög­lich, da dort die Norm­farb­werte der Voll­far­ben (unter Norm­lichtart C) nach Grenz­wellen­län­gen ge­ord­net sind. Man kann sich da­durch hel­fen, dass man die cha­rak­te­ris­ti­sche oder mittlere Wellen­länge der Voll­far­ben (dominant wave length) λ_m graphisch er­mit­telt³ und auf gleiche Wei­se diejenige

¹ Unter Voll­farb­koor­di­na­ten sind auf Voll­far­ben be­zo­gene Ostwald- oder Helmholtz-Koordinaten zu verstehen.

² C. F. FOSS, D. NICKERSON und W. C. GRANVILLE, J. Opt. Soc. Amer. 34, 361 (1944).

³ Zum Bei­spiel mit Hilfe der Dia­gramme im *Handbook of Colorimetry* von A. C. HARDY, S. 61–85.

Tabelle II.–Zentrierte trichromatische Koordinaten der Vollfarben bei Normlichtart C

Typ	Nr.	S	q	λ_m	λ_1	λ_2	X^*	Y^*	Z^*	A_v-C_v	x^*	y^*
2c	1'		0,0000	477,2	380,0	524,15	0,2076	0,2076	0,9930	0,7854	0,1474	0,1474
	2'		0,0470	479,2		530,0	0,2148	0,2515	0,9953	0,7805	0,1470	0,1721
	3'		0,1324	482,1		540,0	0,2365	0,3373	0,9977	0,7612	0,1505	0,2146
	4'		0,1808	483,5		545,5	0,2544	0,3889	0,9985	0,7441	0,1550	0,2369
	5'		0,2206	484,6		550,0	0,2724	0,4327	0,9989	0,7265	0,1599	0,2539
	6'		0,2687	485,7		555,5	0,2989	0,4871	0,9992	0,7003	0,1674	0,2729
	7'		0,3071	486,6		560,0	0,3243	0,5316	0,9994	0,6751	0,1748	0,2865
	8'		0,3641	487,8		567,0	0,3700	0,5992	0,9995	0,6295	0,1879	0,3044
	9'	IV	0,3988	488,5	420,0	567,3	0,3628	0,6018	0,9621	0,5993	0,1883	0,3123
	10'		0,4320	489,1	425,0	567,4	0,3549	0,6025	0,9281	0,5732	0,1882	0,3195
	11'		0,4888	490,1	430,0	567,5	0,3425	0,6029	0,8752	0,5327	0,1881	0,3312
	12'		0,5393	490,9	433,0	567,7	0,3341	0,6044	0,8353	0,5012	0,1884	0,3407
	13'		0,6018	491,8	436,0	567,8	0,3239	0,6048	0,7907	0,4668	0,1884	0,3518
	14'		0,7117	493,3	440,0	568,0	0,3096	0,6058	0,7258	0,4162	0,1886	0,3691
	15'		0,7454	493,7	441,0	568,1	0,3063	0,6064	0,7089	0,4026	0,1889	0,3740
	16'		0,8415	494,8	443,5	568,3	0,2975	0,6075	0,6659	0,3684	0,1894	0,3867
	17'		0,9347	495,8	445,5	568,5	0,2907	0,6087	0,6309	0,3402	0,1900	0,3978
1	18'	V	1,0000	496,5	446,74	568,61	0,2864	0,6092	0,6092	0,3228	0,1903	0,4048
	19'		0,8255	498,4	450,0	568,9	0,2753	0,6106	0,5521	0,3353	0,1914	0,4246
	20'		0,5781	502,2	455,0	569,6	0,2609	0,6145	0,4653	0,3536	0,1946	0,4583
	21'		0,3578	507,0	460,0	570,4	0,2490	0,6188	0,3813	0,3698	0,1993	0,4954
	22'		0,0982	515,5	466,8	572,0	0,2399	0,6278	0,2780	0,3879	0,2094	0,5480
	23'	VI	0,0000	520,2	469,48	572,9	0,2400	0,6331	0,2400	0,3931	0,2156	0,5688
	24'		0,0175	521,0	470,0	573,1	0,2404	0,6343	0,2334	0,4009	0,2169	0,5724
	25'		0,0772	524,4	471,9	574,0	0,2434	0,6401	0,2102	0,4299	0,2225	0,5853
	26'		0,1583	529,8	475,0	575,7	0,2512	0,6510	0,1760	0,4750	0,2330	0,6038
	27'		0,2063	533,3	477,0	577,2	0,2605	0,6609	0,1564	0,5045	0,2417	0,6132
	28'		0,2728	538,2	480,0	580,0	0,2802	0,6793	0,1305	0,5488	0,2571	0,6232
	29'		0,3429	543,3	483,0	584,1	0,3132	0,7036	0,1084	0,5972	0,2779	0,6260
	30'		0,3939	546,9	485,0	587,8	0,3449	0,7285	0,0956	0,6329	0,2950	0,6232
	31'		0,4553	551,0	487,0	593,0	0,3913	0,7586	0,0843	0,6743	0,3170	0,6146
	32'		0,5361	556,0	489,0	600,9	0,4630	0,7994	0,0743	0,7251	0,3464	0,5980
	33'		0,6164	560,4	490,4	610,0	0,5430	0,8387	0,0678	0,7709	0,3746	0,5786
	34'		0,6889	564,2	491,2	620,0	0,6217	0,8733	0,0646	0,8087	0,3986	0,5600
	35'		0,7441	566,8	491,7	630,0	0,6848	0,8988	0,0625	0,8363	0,4160	0,5460
	36'		0,7831	568,5	492,0	640,0	0,7305	0,9158	0,0613	0,8545	0,4278	0,5363
	37'		0,8085	569,7	492,2	650,0	0,7610	0,9269	0,0605	0,8664	0,4353	0,5301
	38'		0,8239	570,3	492,3	660,0	0,7796	0,9334	0,0601	0,8733	0,4397	0,5264
2	39'		0,8405	571,0	492,4	740,0	0,8000	0,9405	0,0597	0,8808	0,4444	0,5224
	40'		0,8528	571,5	496,5	740,0	0,7992	0,9292	0,0458	0,8834	0,4505	0,5237
	41'		0,8649	572,0	500,0	740,0	0,7989	0,9180	0,0364	0,8816	0,4557	0,5236
	42'		0,9085	573,8	510,0	740,0	0,7985	0,8771	0,0182	0,8589	0,4714	0,5178
	43'		0,9693	576,2	520,0	740,0	0,7956	0,8205	0,0091	0,8114	0,4895	0,5049

der vorgegebenen Farbe, worauf man die Farbtongleichheit zahlenmässig feststellen kann.

Direkter und genauer führen jedoch aus den trichromatischen Koordinaten rechnerisch abgeleitete Parameter zum Ziel. Farbtongleichheit (im mischmetrischen Sinn) oder gleiche charakteristische Wellenlänge bedeutet ja nichts anderes, als dass die Orte der gegebenen Farbe, der farbtongleichen Vollfarbe und der Vergleichsspektralfarbe im trichromatischen Dreieck auf einer Geraden durch den *Beleuchtungspunkt* liegen. In der zentrierten IBK-Farbtabelle, in der letzterer mit dem Dreiecksmittelpunkt zusammenfällt, lässt sich diese geometrische Bedingung besonders einfach formulieren. Sämtliche Farbpunkte auf einer Geraden vom Dreiecksmittelpunkt aus genügen nämlich der Bedingung

$$q = \frac{B-C}{A-C}, \quad (9)$$

q ist der Farbtongquotient nach MIESCHER¹; für die zugehörigen Gegenfarben auf der gleichen Geraden jenseits des Mittelpunkts gilt

$$q' = \frac{B'-C'}{A'-C'} = 1-q. \quad (10)$$

Durch die früher eingeführte Nebenbedingung $A > B > C$ bzw. $A' > B' > C'$ wird dafür gesorgt, dass die beiden Abschnitte diesseits und jenseits des Mittelpunkts eindeutig definiert sind und dass q nur zwischen 0 und +1 variiert. Den Verlauf von q um das IBK-Farbdreieck zeigt Abbildung 4. Gleichzeitig kann man daraus ablesen, wie die q -Teilung durch geometrische Addition von Bruchteilen einer Koordinate zur Einheit der andern zustande kommt¹.

Die Verwendung von q ermöglicht auf einfache Weise, im mischmetrischen Sinne farbtongleiche Farben beliebiger Art zu ermitteln, weshalb wir in den Tabellen I und II die trichromatischen Koordinaten der Vollfarben nach q -Werten geordnet haben, wobei die zwangslose Überbrückung der spektralen Lücke im violetten Gebiet zu beachten ist. Der Farbtongkreis wird je nach den

¹ Ähnliche Farbtong-Masszahlen haben A. KLUGHARDT, Z. techn. Physik 8, 290 (1927); 10, 101 (1929); E. HASCHKE, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien IIa 136, 462 (1927), und M. RICHTER, Licht 5, 124 (1935), benützt.

¹ K. MIESCHER, Z. techn. Physik 11, 66 (1930).

Grössenverhältnissen der zentrierten Normfarbwerte X^* , Y^* und Z^* in sechs Sektoren unterteilt, die mit römischen Zahlen bezeichnet sind, beginnend mit I für

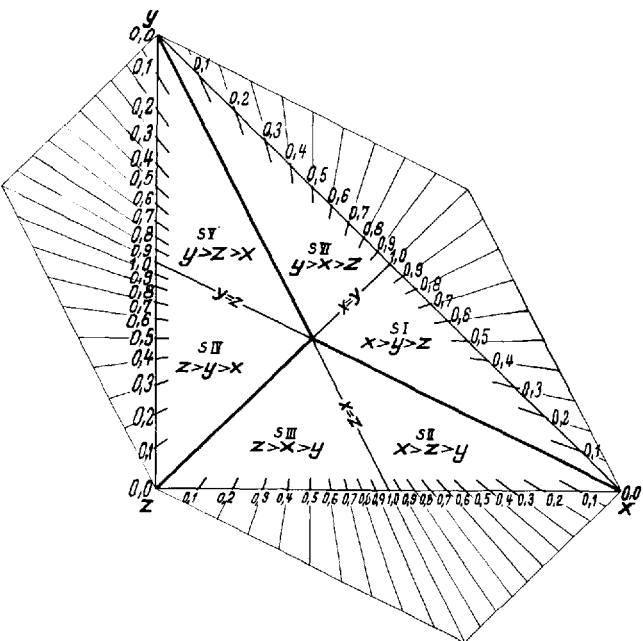


Abb. 4. Sektoreinteilung und q -Werte im IBK-Dreieck.

$X^* > Y^* > Z^*$, also $X^* = A$, $Y^* = B$ und $Z^* = C$ im gelb-roten und endend mit VI für $Y^* = A$, $X^* = B$ und $Z^* = C$ im grün-gelben Sektor (Abb. 4). Auf den Sektorgrenzen nimmt q abwechselungsweise den Wert 0 und ± 1 an. Da der Verlauf von q an diesen Stellen umkehrt, ist bei der Interpolation Vorsicht am Platze. Zur

Vereinfachung haben wir in den Tabellen I und II die genau auf den Sektorgrenzen liegenden Werte eingefügt¹.

Es ergibt sich als einfache Regel zur Sektoreinteilung, dass die den Sektoren entsprechenden Teildreiecke zur Ecke der grössten Koordinate hinweisen und auf der Seite der zweitgrössten liegen. Je zwei gegenüberliegende Sektoren enthalten Gegenfarben, deren q -Werte sich zu 1 ergänzen. Sind die Koordinaten der einen Vollfarbe A , B und C , so betragen diejenigen der Gegenvollfarbe $A' = 1 - C$, $B' = 1 - B$ und $C' = 1 - A$. Die in den Umrechnungsformeln (4) und (5) auftretenden charakteristischen Differenzen $A - C$, die in den Tabellen I und II gesondert aufgeführt werden, sind demnach für Vollfarbe und Gegenvollfarbe gleich. Ganz allgemein bedeutet Gleichheit der $A - C$ -Werte, dass sich zwei Gegenfarben bei gleichteiliger Mischung zu Unbunt ergänzen.

Der Zusammenhang zwischen q , den Grenzwellenlängen λ_1 und λ_2 , den charakteristischen Wellenlängen λ_m , sowie der Typen- und Sektoreinteilung ist in den Abbildungen 5 und 6 graphisch dargestellt. λ_1 und λ_2 sind natürlich für je zwei Gegenfarben gleich, während λ_m im Prinzip für Gegenfarben verschieden ist; im grossen Gebiet der Purpurfarben wird die komplementäre Wellenlänge mit einem Minuszeichen zur Charakterisierung verwendet.

6. Analytische und geometrische Kennzeichnung der Körperfarben

Die in den Abbildungen 1 und 2 dargestellten idealisierten Farben (Kurven b und b') wurden für Normlichtart C aus den (zentrierten) Normfarbwerten der realen Farben (Kurven a und a') ermittelt. Die Anteile an Weiss, Vollfarbe und Schwarz nach OSTWALD sind aus

¹ Durch Einführung negativer q -Werte könnten 3 der 6 Unstetigkeitsstellen zum Verschwinden gebracht werden. Die Bildungsregel für den Farbtonquotienten wird jedoch umständlicher, indem für die 3 Sektorenpaare 3 verschiedene Formeln angegeben werden müssten.

Tabelle III

Farbkoordinaten	Tiefgrüne Farbe		Hellgelb-grüne Farbe der Umschlagsseite	
	Normlichtart A	Normlichtart C	Normlichtart A	Normlichtart C
<i>Trichromatische Koordinaten</i>				
1 X^*	0,1128 (C)	0,1192 (B)	0,5840 (B)	0,5699 (B)
2 Zentrierte Normfarbwerte ($Y^* = \text{Helligkeit}$)	0,2141 (A)	0,2660 (A)	0,5993 (A)	0,6057 (A)
3 Z^*	0,1279 (B)	0,1036 (C)	0,4693 (C)	0,4603 (C)
4 Helligkeit der farbtongleichen Vollfarbe . . . Y_v	0,5819	0,6427	0,8987	0,9030
5 Zentrierte Normfarbanteile, Dreieckskoordinaten ($x^* + y^* + z^* = 1$)	x^* 0,2480 (c)	0,2439 (b)	0,3534 (b)	0,3484 (b)
6 y^*	0,4708 (a)	0,5442 (a)	0,3626 (a)	0,3703 (a)
7 z^*	0,2812 (b)	0,2119 (c)	0,2840 (c)	0,2814 (c)
<i>Farbtonkennzeichnung</i>				
8 Farbtonquotient q	0,1491	0,0961	0,8823	0,7538
9 Sektor S	V	VI	VI	VI
10 Farbtongleiche Spektralfarbe λ	523,0 m μ	525,6 m μ	575,6 m μ	567,0 m μ
<i>Vollfarbkoordinaten</i>				
a) nach OSTWALD $v + w + s = 100$				
11 Vollfarbe v	30,7%	36,9%	15,7%	17,3%
12 Weiss w	3,6%	2,9%	38,1%	44,9%
13 Schwarz $s = 100 - f$	65,7%	60,2%	46,2%	37,8%
b) nach HELMHOLTZ-MIESCHER $k + t = 100$				
14 Vollfarbsättigung $t = v/f \cdot 100$	89,4%	92,7%	29,1%	27,8%
15 Weisslichkeit $k = w/f \cdot 100$	10,6%	7,3%	70,9%	72,2%
16 Vollfarbbezug $f = w + v$	34,3%	39,8%	53,8%	62,2%

den Darstellungen ohne weiteres ersichtlich¹. Dabei gibt Abbildung 1 ein durch Ausfärbung auf gelatiniertem Papier gewonnenes Grün höchstmöglicher Sättigung²,

Es liegen nun alle Daten zur Bestimmung der «Vollfarbkordinaten» vor: Die Formeln (4) und (5) ergeben die Ostwald-Koordinaten (Zeilen 11–13) und die For-

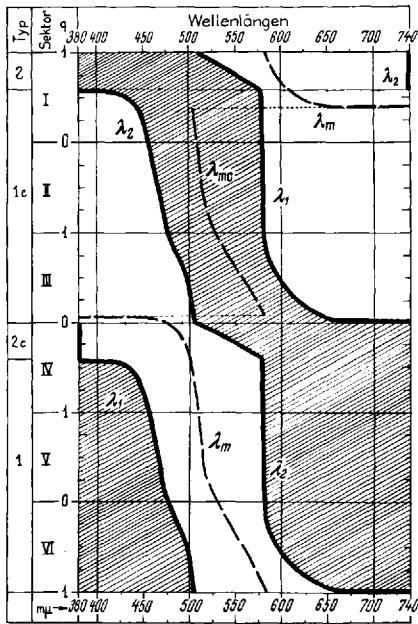


Abb. 5. Typen- und Sektoreinteilung, sowie Grenzwellenlängen λ_1 und λ_2 und charakteristische Wellenlängen λ_m der Vollfarben, bzw. λ_{mc} der Gegenvollfarben als Funktion des Farbquotienten q bei Normlichtart A.

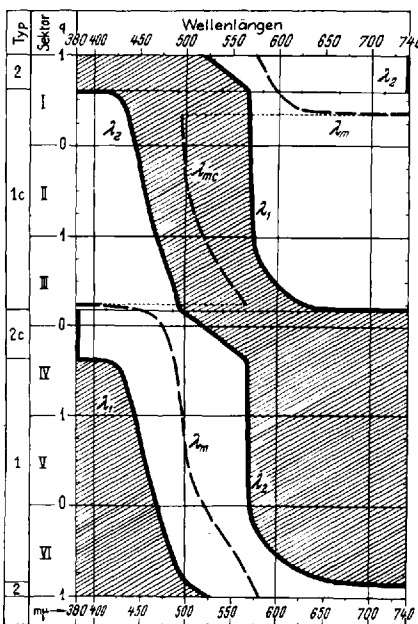


Abb. 6. Typen- und Sektoreinteilung, sowie Grenzwellenlängen λ_1 und λ_2 und charakteristische Wellenlängen λ_m der Vollfarben, bzw. λ_{mc} der Gegenvollfarben als Funktion des Farbquotienten q bei Normlichtart C.

Abbildung 2 das helle Gelbgrün des Umschlags dieser Zeitschrift³ wieder.

meln (6) die Koordinaten nach HELMHOLTZ-MIESCHER (Zeilen 14–16).

Die trichromatischen und die Vollfarbkordinaten der beiden Farbproben sind in Tabelle III zusammengestellt, sowohl gemäss der für unsere Verhältnisse eher etwas blautichigen, besonders in den USA. als künstliches Tageslicht bevorzugten Normlichtart C, wie für die Normlichtart A, welche dem ungefilterten Licht einer elektrischen Glühbirne entspricht (Abendbeleuchtung). Die zentrierten Normfarbwerte (Zeilen 1 bis 3) wurden für Normlichtart C mit dem automatischen, mit dem Spektrophotometer gekoppelten Integrator, für Normlichtart A durch Integration der Remissionskurven nach der 30-Auswahlordinaten-Methode bestimmt und mit ihrer Hilfe die Koordinaten der Farbtafel

$$x^* = \frac{X^*}{X^* + Y^* + Z^*} \quad \text{und} \quad y^* = \frac{Y^*}{X^* + Y^* + Z^*}$$

(Zeilen 5–7) berechnet. Formel (9) ergibt den Farbtonquotient (Zeile 8). Aus ihm sowie dem Farbsektor (Zeile 9) ermittelt man die Wellenlänge⁴ der farbtongleichen Spektralfarbe (Zeile 10), sei es aus den Abbildungen 5 und 6 oder aus den Tabellen I und II; letzteren entnimmt man die Koordinaten der farbtongleichen Vollfarbe und damit deren Helligkeit (Zeile 4).

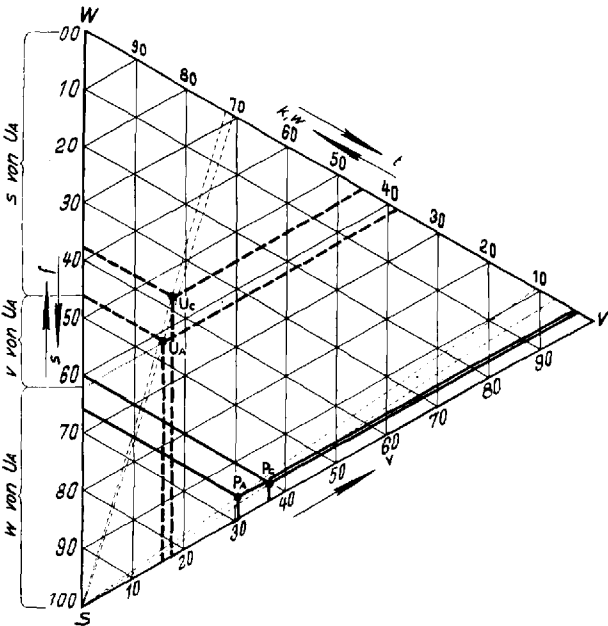


Abb. 7. Farbtongleiches Dreieck mit den Ostwald-Koordinaten als Dreieckskoordinaten. w = Weissanteil, s = Schwarzanteil, v = Vollfarbanteil, t = Vollfarbsättigung, k = Weisslichkeit, j = Vollfarb- bezug. P_A und P_C Farbpunkte der tiefgrünen Färbung, U_A und U_C Farbpunkte des hellgelbgrünen Umschlages dieser Zeitschrift bei den Normlichtarten A und C.

¹ Wie aus den Abbildungen 1 und 2 durch Projektion der idealisierten Kurven auf die Ordinate zu entnehmen ist, lässt sich jede Farbe durch einen senkrechten Strich darstellen, dessen Länge dem Vollfarbanteil v entspricht, während untere und obere Lücke ihren Weissanteil w und Schwarzanteil s charakterisieren [siehe K. MIESCHER, Z. Sinnesphysiol. 37, 101 (1925); R. ROMETSCH und K. MIESCHER, Exper. 9, 307 (1953)].

² Solche Ausfärbungen verwenden wir neuerdings für Farbkreisteilungen, R. ROMETSCH und K. MIESCHER, Exper. 9, 307 (1953).

³ Wird am Licht ziemlich rasch gelber.

⁴ Für praktische Zwecke ist allerdings der Bezug auf eine stufenmetrisch bestimmte Farbkreisteilung zwecknässiger.

Die trichromatische Farbtafel gestattet lediglich die Festlegung der Lage einer Farbe nach Farbton und tri-

chromatischer Sättigung¹; für unsere beiden Beispiele, *P* tiefes Grün, und *U* Farbe der Umschlagsseite, sind die Farbpunkte in Abbildung 3 eingezeichnet. Abstrahiert man vom Farbton, so lässt sich der Zusammenhang zwischen den beiden Vollfarbkoordinatenpaaren, den «Ostwald-» und den «Helmholtz-Koordinaten», am anschaulichsten geometrisch durch ein (mischmetrisch) farbtongleiches Dreieck zur Darstellung bringen. Dabei wählt man zweckmässig ein gleichseitiges, da die Frage der richtigen Stufung in der Mischmetrik nicht gelöst werden kann. In Abbildung 7 sind die Farbpunkte in einem solchen Dreieck wiederum für die beiden grünen bzw. gelbgrünen Farbbeispiele und die Normlichtarten A und C wiedergegeben.

Es sei daran erinnert, dass sich im farbtongleichen Dreieck parallel zur *WS*-Seite vollfarbgleiche, parallel zur *WV*-Seite schwarzgleiche und parallel zur *SV*-Seite weissgleiche Farben befinden. Vom Schwarzpunkt nach der *WV*-Seite ausgehende Strahlen stellen Farben gleicher Sättigung bzw. gleicher Weisslichkeit dar. Bezugsgleiche Farben liegen wie die schwarzgleichen auf Parallelen zur *WV*-Seite. Im übrigen befinden sich Farben gleicher Helligkeit oder Leuchtdichte auf Parallelen zu der Geraden zwischen *V* und jenem Punkte auf der *WS*-Seite, welcher der Helligkeit Y_p^* der entsprechenden Vollfarbe entspricht. Diese Y_p^* -Werte sind unseren beiden Tabellen I und II zu entnehmen (für die beiden Farbbeispiele der Tabelle III, Zeile 4).

Es sei hier nur erwähnt, dass das farbtongleiche Dreieck zwar den weitaus überwiegenden Teil realisierbarer Körperfarben umfasst, ein kleiner Teil, vor allem sehr gesättigter roter und grüner Farben, jedoch ausserhalb des Dreiecks zu liegen kommt und mit negativem Weiss- bzw. Schwarzgehalt gekennzeichnet werden muss. Es betrifft dies das Gebiet der «übersättigten» ($t > 100$) und «überklaren» ($f > 1$) Farben ausserhalb der *SV*- bzw. *WV*-Seite².

Was aus der trichromatischen Farbtafel Abbildung 3 nicht ersichtlich war, erkennt man sofort aus Abbildung 7, wie weit nämlich die mit den reinsten zur Verfügung stehenden Farbstoffen hergestellte tiefgrüne Färbung noch vom Ideal der Vollfarbe entfernt, wie auffallend gross ihr Schwarzgehalt ist. Die entsprechende Beobachtung hat vor 40 Jahren OSTWALD zur Aufstellung der Hypothese vom «natürlichen» Schwarzgehalt kalter Farben bewogen, die zwar nie anerkannt, jedoch bis heute noch nicht durch die Auffindung schwarzärmerer, grüner, blauer und violetter Farbstoffe widerlegt worden ist.

Weiter ergibt sich aus Abbildung 7, dass sich beim Übergang von Tageslicht (Normlichtart C) zu künstlicher Beleuchtung (Normlichtart A) der Schwarzanteil bei beiden Farbbeispielen erhöht; bei der tiefgrünen Farbe nimmt überdies der Weissanteil zu und die Sättigung ab; gerade das Umgekehrte gilt für die hellgelbgrüne Farbe, sie wird etwas weniger weiss und damit gesättigter, trotz abnehmendem Vollfarbanteil.

7. Schluss

Die blosse Angabe trichromatischer Daten und selbst ihre Darstellung in der trichromatischen Farbtafel fand trotz vielfacher Bemühungen, besonders in Europa, nur sehr beschränkten Eingang in den praktischen Gebrauch. In der Tat ist das trichromatische Zahlentripel zu wirklichkeitsfern; dagegen ermöglicht seine Transformation

in Vollfarbkoordinaten, sei es nach OSTWALD oder HELMHOLTZ-MIESCHER, eine viel anschaulichere Kennzeichnung der Körperfarben. Bei der Darstellung im (mischmetrisch) farbtongleichen Dreieck ergibt sich besonders klar, wie die beiden Koordinatenpaare sich gegenseitig ergänzen und zueinander komplementär sind. Eine solche Wiedergabe der Farben, besonders unter Mitverwendung einer geeigneten Farbkreiseinteilung, bedeutet für viele Zwecke, nicht zuletzt für den Farbstoffchemiker und Färber, eine grosse Hilfe.

Allerdings bilden die Vollfarben einen an sich willkürlichen Spezialfall. An ihrer Stelle könnten auch andere charakteristische Reinfarben, zum Beispiel die spektralgesättigten Reinfarben nach ARENS¹ oder die trichromatischen Reinfarben nach MIESCHER², gewählt werden; die angegebenen Transformationen und die geschilderten Beziehungen im farbtongleichen Dreieck wären gleichermaßen gültig. Mit dieser Andeutung müssen wir es hier bewenden lassen.

Eine Klärung der misch- oder reizmetrischen Begriffe schien uns unerlässlich, wenn mit Erfolg das Reich der Stufenmetrik erschlossen werden soll. Hier befindet sich noch alles im Flusse³.

Frau M. THÜRKAUF danken wir für die Ausführung der Berechnungen und Zeichnungen.

Summary

After a short discussion of the relations between the different color coordinate systems formulae are derived which allow the transformation of tristimulus values to full color coordinates in a simple way. The tristimulus values are first "centred", i.e. the whole chromacity diagram is transformed in a manner to bring the illumination point in the centre of the triangle ($x = 0.333$ and $y = 0.333$). The centred tristimulus values of the pure full colors used as parameters are given in 2 tables for illumination A and C. The problem of finding the full color of the same hue as a given color is solved by means of the hue quotient, $q = B-C/A-C$, where A, B and C are the tristimulus values with the conditions $A > B > C$. This quotient must be the same for every color of the same hue. The relations between the full color coordinates according to OSTWALD and to HELMHOLTZ are demonstrated graphically.

¹ H. ARENS, Physik. Z. 43, 43 (1942).

² K. MIESCHER, Z. techn. Physik 11, 66 (1930).

³ In diesem Zusammenhang verweisen wir, abgesehen von unserer symmetrischen Farbkreiseinteilung, zum Beispiel auf die ausgedehnten amerikanischen Bestrebungen um das Munsell-Farbsystem, auf die Schwellenbestimmungen von McADAM im Farbraum und die interessanten Bemühungen um ein neues Farbsystem von M. RICHTER in Deutschland (siehe die neue Zeitschrift «Die Farbe»).

Congressus

HOLLAND

Internationales Symposium über elektrische Entladungen in Gasen

Delft – 25.–30. April 1955

Die Technische Hochschule in Delft veranstaltet gemeinsam mit den Philips Werken in Eindhoven, unterstützt durch die Internationale Union für reine und angewandte Physik ein Internationales Symposium mit folgenden Hauptreferenten: H. S. W. MASSEY, London; L. B. LOEB, Berkeley; CHR. VAN GEEL, Delft; S. C. BROWN, Cambridge, USA.; M. A. BIONDI, East Pittsburgh; W. LOCHTE-HOLTGREVEN, Kiel; J.-M. MEEK, Liverpool.

Alle Auskünfte erteilt: Prof. A. W. VAN WAGENSVELD, Symposiumsekretär, Mijnbouwplein 11, Delft, Holland.

¹ Der trichromatische Sättigungsbegriff ist nicht eindeutig, sondern lässt verschiedene Definitionen zu.

² Siehe hiezu K. MIESCHER, Z. Sinnesphysiol. 57, 76 (1925); Z. techn. Physik 11, 233 (1930); R. LUTHER, Z. techn. Physik 8, 540 (1927).